LA MATEMATICA PREDICATIVA
(Mauro Murzi)

1. Introduzione

Il *predicativismo* è una concezione filosofica della matematica. È nato all'inizio del Novecento come risposta ai paradossi della teoria degli insiemi. Al suo sviluppo hanno contribuito importanti filosofi e matematici, tra i quali Bertrand Russell, Henri Poincaré ed Hermann Weyl. La caratteristica del predicativismo è il rifiuto delle definizioni impredicative. Una definizione è *impredicativa* se menziona una totalità cui appartiene l'oggetto definito.[1] La più nota definizione impredicativa è quella dell'insieme universale.

(1) L'insieme universale è l'insieme di tutti gli insiemi.

Per il predicativismo, il riferimento a una totalità cui appartiene l'oggetto definito è un circolo vizioso. Il predicativismo ammette soltanto le definizioni non circolari, chiamate *predicative*. Le definizioni impredicative sarebbero la causa dei paradossi della teoria degli insiemi. Il più noto è il paradosso di Russell, concernente l'insieme R di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi. Per definizione, un insieme x appartiene a R se e solo se x non appartiene a sé stesso. In simboli:

(2) $x \in R \leftrightarrow x \notin x$

Sostituendo x con R in (2):

(3) $R \in R \leftrightarrow R \notin R$

Il principio del terzo escluso, secondo cui ogni proposizione è vera oppure è falsa, assicura che $R \in R$ è vera oppure $R \in R$ è falsa. Se $R \in R$ è vera, da (3) segue $R \notin R$, che contraddice l'ipotesi $R \in R$. Se $R \in R$ è falsa, allora $R \notin R$ è vera. Da (3) e da $R \notin R$ si ricava $R \in R$, che contraddice l'ipotesi che $R \in R$ sia falsa. Il paradosso consiste nel fatto che la definizione (2), legittima nella teoria non formale degli insiemi, implica una contraddizione.

Si può risolvere il paradosso di Russell negando la validità del principio del terzo escluso. Nel caso in cui le proposizioni $R \in R$ e $R \notin R$ siano indeterminate, ossia né vere né false, la definizione (2) non implica alcuna contraddizione. La concezione filosofica della matematica nota come *intuizionismo* preferisce questa soluzione. I sistemi matematici che rifiutano il principio del terzo escluso formano la *matematica intuizionista*.

Un altro modo per risolvere il paradosso è considerare la definizione (2) circolare e priva di significato, perché impredicativa. Il predicativismo preferisce questa soluzione. I sistemi matematici che usano solo definizioni predicative formano la *matematica predicativa*.

Un'altra soluzione consiste nell'osservare che all'origine del paradosso c'è il pregiudizio che una qualsiasi collezione di oggetti sia un insieme. Invece, soltanto le collezioni che soddisfano determinate condizioni sono insiemi. Un'opportuna formulazione di tali condizioni evita le contraddizioni. Adottando questa soluzione, è possibile salvaguardare il principio del terzo escluso e ammettere le definizioni impredicative. I sistemi matematici che usano questa soluzione prendono il nome di *matematica classica*.

L'obiettivo di questo lavoro è descrivere le ragioni filosofiche del predicativismo e spiegare come si possa misurare la forza dimostrativa della matematica predicativa.[2]

2. Presupposti filosofici

Il predicativismo nacque per risolvere i paradossi della teoria degli insiemi. La maggior parte dei logici e matematici, tuttavia, preferì superare i paradossi rimanendo nell'ambito della matematica classica. Il predicativismo, nondimeno, non scomparve. Il rifiuto delle definizioni impredicative ha motivazioni indipendenti dalla soluzione dei paradossi. Il rifiuto delle definizioni impredicative è l'espressione di una

---

[1] Questa nozione di definizione impredicativa è di Russell (cfr. B. RUSSELL, "Mathematical logic as based on a theory of types" in *American Journal of Mathematics*, vol. 30 (1908), pp. 222-262). Poincaré attribuisce un significato diverso alle definizioni impredicative (cfr. §10).

[2] Il contributo si basa su M. MURZI, *Teorie formali per definizioni induttive iterate*, Tesi di laurea, Università di Roma "La Sapienza", 1984.

concezione filosofica degli insiemi infiniti. Poincaré espone le ragioni filosofiche del predicativismo in uno scritto postumo.[3] Egli descrive due scuole di pensiero sugli insiemi infiniti.

> Quelli della prima scuola, che chiamerò i *Pragmatisti* [*Pragmatistes*] (perché gli si deve almeno assegnare un nome) […] Quelli dell'altra scuola, che chiamerò, per brevità, i *Cantoriani* [*Cantoriens*].[4]

Poincaré critica i Cantoriani e sostiene i Pragmatisti, ai quali attribuisce la propria concezione filosofica della matematica. Anche se Poincaré afferma di aver usato questi appellativi solo per attribuire un nome alle due scuole, ritengo che li abbia scelti consapevolmente. Il nome Cantoriani si riferisce a Georg Cantor, il matematico tedesco ideatore della teoria degli insiemi e dell'aritmetica dei numeri infiniti. Il termine Pragmatisti richiama il pragmatismo americano di James.

I Cantoriani sono realisti. Per i Cantoriani, gli insiemi infiniti esistono realmente, in modo indipendente dall'attività umana.

> I Cantoriani sono realisti, anche per quello che concerne le entità matematiche; sembra loro che queste entità abbiano un'esistenza indipendente; il matematico [*géomètre*] non le crea, le scopre.[5]

Poincaré muove due critiche contro il realismo matematico. La prima sostiene che, accettando il realismo, gli oggetti matematici si ridurrebbero a pure essenze prive di reale esistenza. Poincaré espone questa critica in modo molto sintetico. Tenterò di ricostruire l'argomentazione di Poincaré, collegandola all'influenza della filosofia di Kant. Per comprendere la motivazione dell'accusa rivolta ai Cantoriani, è necessario approfondire il ruolo che Poincaré attribuisce alla definizione matematica. Egli accetta la concezione della definizione matematica che Kant espone nella *Critica della ragion pura*:

> le definizioni filosofiche sono idonee solo come esposizioni, le matematiche invece come costruzioni di concetti prodotti dall'origine […] e quindi producono il concetto stesso

> nella matematica non abbiamo assolutamente alcun concetto prima della definizione, dalla quale il concetto è formato per la prima volta.[6]

Gli oggetti matematici, sostiene Kant, non esistono indipendentemente dalla loro definizione, non hanno un'esistenza antecedente la definizione. Gli oggetti matematici sono costruiti dalla definizione. La definizione matematica è creativa. È l'atto che porta all'esistenza l'oggetto matematico. La definizione matematica, in quanto costruzione di oggetti, produce l'oggetto definito. La definizione matematica non procede per accostamento di concetti, ma per costruzione di oggetti.

Il realismo matematico induce i Cantoriani a rifiutare la teoria kantiana della definizione matematica. La definizione, per i Cantoriani, non costruisce l'oggetto. L'oggetto matematico esiste prima della definizione. La definizione, per i Cantoriani è l'esposizione dell'essenza dell'oggetto definito. I Cantoriani, di fatto, accettano la teoria scolastica della definizione. Secondo la teoria scolastica, la definizione di una collezione

---

[3] H. POINCARE, "Les mathématiques et la logique" in *Dernières pensées*, Parigi, Flammarion, 1913, pp. 143-162. Henri Poincaré fu un noto matematico, scienziato e filosofo francese, nato a Nancy nel 1854 e morto a Parigi nel 1912. Riteneva che gli assiomi della matematica fossero principi sintetici a priori, nel senso kantiano di tale espressione. Rifiutò il formalismo di Hilbert, il logicismo di Russell e il realismo matematico di Cantor, rivendicando il ruolo centrale dell'intuizione. Poincaré è spesso qualificato come un convenzionalista. In realtà, Poincaré si schierò apertamente contro il convenzionalismo. Secondo Poincaré le convenzioni sono asserti refutabili, soggetti al controllo dell'esperienza. Poincaré fu piuttosto un realista non ingenuo in fisica e un costruttivista in matematica.

[4] Ivi, p. 146 (tr. it. mia).

[5] Ivi, pp. 159-160 (tr. it. mia).

[6] I. KANT, *Critica della ragion pura*, A 730-731 B 758-759 (tr. it. mia). Chiodi traduce: «le definizioni filosofiche non sono che esposizioni di concetti dati, mentre le matematiche sono costruzioni di concetti originariamente foggiati […] queste fanno dunque il concetto stesso» «Nella matematica, al contrario, non possediamo alcun concetto anteriormente alla definizione, giacché è proprio questa a darci il concetto» (I. KANT, *Critica della ragion pura*, tr. it. di P. Chiodi, UTET, Torino, 2005, p. 561-562). La traduzione francese del 1905: «les définitions philosophique ne sont que des expositions de concepts donnés, tandis que les définitions mathématique sont la contruction [*sic*] de concepts originairement formés […] et constituent, par conséquent, le concept même» «Dans la mathématique, au contraire, nous n'avons aucun concept qui précède la définition, puisque c'est par elle que le concept est tout d'abord donné» (I. KANT, *Critique de la raison pure*, tr. fr. di A. Tremesaygues e B. Pacuad, Felix Alcan, Parigi, 1905, p. 579). Il testo tedesco è: «philosophische Definitionen nur als Expositionen gegebener, mathematische aber als Konstruktionen ursprünglich gemachter Begriffe […] und also den Begriff selbst *machen*» «Dagegen haben wir in der Mathematik gar keinen Begriff vor der Definition, als durch welche der Begriff allererst gegeben wird».

d'individui (la *specie*) descrive l'essenza degli individui. La teoria scolastica ritiene che la specie esista anteriormente alla definizione. L'obiettivo della definizione è descrivere l'essenza degli individui appartenenti alla specie. Per i Cantoriani, definire un oggetto matematico può significare soltanto descriverne l'essenza. I Cantoriani negano che la definizione sia un procedimento che costruisce un'istanza del concetto definito. L'oggetto matematico, quindi, è puramente astratto. I Cantoriani, asserisce Poincaré, vorrebbero assicurare un'esistenza assoluta agli oggetti matematici, ma li riducono a concetti astratti privi di contenuto.[7]

La seconda critica che Poincaré espone contro il realismo matematico riguarda l'infinito. Gli oggetti matematici, osserva Poincaré, sono in numero infinito. Che cosa significa "numero infinito"? Poincaré ritiene che definire un insieme significhi individuare una regola per produrre i suoi elementi. Un insieme è infinito se la produzione dei suoi elementi non termina mai, ma genera continuamente nuovi elementi. La caratteristica dell'insieme infinito è l'inesauribilità.[8]

I Cantoriani non danno alcuna importanza al ruolo costruttivo della definizione. Per i Cantoriani, gli insiemi infiniti esistono indipendentemente dal fatto che i loro elementi siano prodotti mediante una regola. I Cantoriani, quindi, non distinguono tra insiemi infiniti costruibili passo dopo passo e gli insiemi infiniti che non sono costruibili mediante la ripetizione indefinita di una regola. Al contrario dei Cantoriani, Poincaré ritiene ammissibili solo gli insiemi infiniti i cui elementi sono generati da una regola ripetuta indefinitamente.

Poincaré chiama Pragmatisti i rappresentanti della scuola di pensiero che si oppone ai Cantoriani. Nei primi anni del Novecento il pragmatismo, nato negli Stati Uniti, si era diffuso in Europa. Il principio fondamentale del pragmatismo è che il significato di una proposizione consiste nella totalità delle conseguenze da essa derivabili. Comprendere un concetto significa, per i pragmatisti, individuare tutti i fenomeni che derivano dall'affermare o negare il concetto. Il significato di un concetto è determinato dalle sue conseguenze. Il pragmatismo rifiuta la teoria della verità come corrispondenza tra pensiero e realtà. Tale teoria sostiene, a giudizio del pragmatismo, che il pensiero sia una copia della realtà. Conoscere la realtà, obietta il pragmatismo, non significa copiarla, ma agire su di essa. Conoscere significa essere in una relazione produttiva con la realtà. La verità non richiede una realtà esterna alla quale corrispondere. Il pragmatismo, quindi, non presume che le proposizioni vere siano conformi a una realtà esterna data. La realtà non è data, ma è costruita. Credo che Poincaré abbia scelto il nome Pragmatisti per evidenziare l'affinità tra la concezione filosofica del costruttivismo matematico e la concezione pragmatista della verità come capacità di agire su una realtà non data ma costruita.

> [I Pragmatisti] considerano che un oggetto esiste soltanto quando è pensato, e che non si può concepire un oggetto pensato indipendentemente da un soggetto pensate […] E poiché un soggetto pensante è un uomo, o qualcosa che somiglia a un uomo, che per conseguenza è un essere finito, l'infinito non può avere altro senso che la possibilità di creare tanti oggetti finiti quanti si desidera.[9]

Possiamo indicare le due scuole di pensiero descritte da Poincaré con i termini di realisti (i Cantoriani) e costruttivisti (i Pragmatisti). Per i realisti, gli oggetti matematici esistono indipendentemente dal soggetto pensante; la definizione identifica le proprietà essenziali dell'oggetto matematico; un insieme infinito è dato nella sua totalità, indipendentemente dalla possibilità di produrre i suoi elementi mediante una regola. Per i costruttivisti gli oggetti matematici esistono solo perché definiti dal soggetto pensante; la definizione porta

---

[7] Usando il linguaggio della programmazione a oggetti, si può asserire che la definizione matematica dei Cantoriani produce classi astratte prive d'istanze, mentre la definizione matematica kantiana costruisce istanze della classe definita.
[8] Talvolta si afferma che Poincaré rifiuta l'infinito attuale. Secondo Poincaré, un insieme infinito sarebbe sempre potenziale, giammai attuale. Non condivido tale interpretazione. Poincaré propone una distinzione diversa da quella tra infinito potenziale e infinito attuale. Poincaré distingue tra due tipi di insiemi infiniti: quelli i cui elementi possono essere generati da una regola che si ripete indefinitamente e quelli i cui elementi non possono essere generati da una regola. Utilizzando una terminologia che usa conoscenze matematiche posteriori alla morte di Poincaré, si può affermare che Poincaré distingue tra insiemi infiniti ricorsivamente enumerabili e insiemi infiniti non ricorsivamente enumerabili. Un insieme è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste una funzione ricorsiva (ossia, un algoritmo) che produce tutti e soli i suoi elementi. I numeri naturali e i numeri razionali sono ricorsivamente enumerabili. I numeri reali non sono ricorsivamente enumerabili. Gli elementi di un insieme ricorsivamente enumerabile sono costruiti uno dopo l'altro secondo una regola data. A mio giudizio, si dovrebbe interpretare il pensiero di Poincaré come se egli affermasse che soltanto insiemi infiniti ricorsivamente enumerabili sono accettabili, invece di inquadrarlo nelle tradizionali categorie dell'infinito attuale e potenziale.
[9] H. POINCARE, "Les mathématiques et la logique", cit., pp.158-159 (tr. it. mia).

all'esistenza gli oggetti matematici; un insieme infinito è ammissibile solo se i suoi elementi sono prodotti mediante una regola data.

3. Numeri naturali

La concezione filosofica della matematica nota come *logicismo* ritiene che sia possibile ridurre la matematica alla logica pura. Poincaré afferma invece che la matematica è irriducibile alla logica. La riduzione della matematica alla logica, osserva Poincaré, potrebbe riuscire a condizione di dimostrare gli assiomi di Peano usando soltanto leggi logiche e definizioni. Gli assiomi di Peano sono le cinque proposizioni seguenti.

(4) Zero è un numero naturale.
(5) Zero non è il successore di alcun numero naturale.
(6) Il successore di un numero naturale è un numero naturale.
(7) Se due numeri naturali sono diversi, allora i loro successori sono diversi.
(8) Se zero ha la proprietà *P*, e se dall'ipotesi che un arbitrario numero naturale *n* abbia la proprietà *P* segue che il successore di *n* ha la proprietà *P*, allora ogni numero naturale ha la proprietà *P*.

I logicisti sostengono che gli assiomi di Peano sono la definizione implicita dei numeri naturali.[10] Il quinto assioma di Peano, proposizione (8), noto come *principio d'induzione*, sarebbe vero per definizione: i numeri naturali sono gli oggetti che soddisfano il principio d'induzione. Secondo Poincaré, il principio d'induzione è un *giudizio sintetico a priori* non derivabile dai principi analitici della logica. Poincaré non nega che talvolta gli assiomi sono definizioni implicite. A suo giudizio, gli assiomi della geometria euclidea sono la definizione implicita degli oggetti geometrici. In generale, sostiene Poincaré, un assioma può essere una definizione implicita soltanto quando è possibile dimostrare, in modo indipendente, che l'oggetto definito esiste. Nella definizione, osserva Poincaré, si presume l'esistenza dell'oggetto definito. Qualora questa esistenza non sia dimostrabile, la definizione ha un ruolo creativo. In tale caso, l'oggetto definito esiste in virtù della definizione.

In quali circostanze un assioma *P* è una definizione implicita? Quando è possibile dimostrare che gli oggetti che soddisfano *P* esistono, in maniera indipendente da *P*. È possibile provare l'esistenza di oggetti che soddisfano *P* soltanto se si riesce a dimostrare che *P* non è contraddittorio.

> Se dunque noi abbiamo un sistema di postulati, e se noi possiamo dimostrare che questi postulati non implicano contraddizioni, noi abbiamo il diritto di considerarli come esprimenti la definizione di una delle nozioni che vi figurano. Se noi non possiamo dimostrarlo, bisogna che l'ammettiamo senza dimostrazione, e questo [sistema di postulati] sarà dunque un assioma; di modo che se vogliamo cercare la definizione nel postulato, troveremo l'assioma nella definizione.[11]

Chi volesse considerare il principio d'induzione come una definizione implicita dei numeri naturali dovrebbe dimostrarne la non contraddittorietà. Una tale dimostrazione, asserisce Poincaré, è impossibile. Ogni presunta giustificazione logica del principio d'induzione dipende dallo stesso principio d'induzione. Come si potrebbe provare, chiede Poincaré, la non contraddittorietà del principio d'induzione? Il metodo più semplice consiste nell'esibire un modello degli assiomi di Peano. Si avrebbe così la certezza che gli assiomi non sono contraddittori. Si supponga, argomenta Poincaré, di considerare un segmento iniziale dei numeri naturali, ad esempio 0, 1 e 2. Si può facilmente provare che tale struttura soddisfa i cinque assiomi, tranne quello formulato in (6). Affinché tale assioma sia vero nel modello proposto, è necessario aggiungere il numero 3, successore di 2. Tuttavia, anche la nuova struttura non soddisfa l'assioma (6). Si deve aggiungere il numero 4, successore di 3. Questa situazione si ripete indefinitamente. Per esibire un modello degli assiomi di Peano si deve usare l'intera struttura dei numeri naturali. Non è quindi possibile esibire un modello degli assiomi di Peano, se non assumendo come modello la struttura stessa dei numeri naturali, presupponendo ciò che si deve dimostrare.

---

[10] Gli assiomi che caratterizzano l'aritmetica dei numeri naturali prendono il nome dal matematico e logico italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Nel ricordarlo, Russell disse: «Provai una grande ammirazione per lui quando lo incontrai per la prima volta al Congresso di Filosofia del 1900, che fu dominato dall'esattezza della sua mente.» Peano ha contribuito in modo fondamentale alla logica matematica, tramite la formalizzazione dell'aritmetica e l'introduzione della notazione moderna.

[11] H. POINCARE, *Science et méthode*, Parigi, Flammarion, 1908, pp. 170-171 (tr. it. mia).

Non essendo possibile esibire un modello degli assiomi di Peano, si deve provare direttamente che gli assiomi non implicano alcuna contraddizione. A tal fine, sarebbe sufficiente provare che se una deduzione di lunghezza n non implica alcuna contraddizione, allora una deduzione di lunghezza $n+1$ non implica alcuna contraddizione. Questa prova utilizza lo stesso principio d'induzione. È quindi circolare. Tutte le dimostrazioni della non contraddittorietà del principio d'induzione si basano sul principio d'induzione stesso, presupponendo l'assioma che si vuole giustificare. Questa situazione prova, secondo Poincaré, che il principio d'induzione è un giudizio sintetico a priori.

Per comprendere la vera natura del principio d'induzione è necessario studiare il suo ruolo nella matematica. A tal fine Poincaré distingue tra *verificazione* e *dimostrazione*.

> La *verificazione* differisce precisamente dalla vera dimostrazione, perché è puramente analitica e perché è sterile. È sterile perché la conclusione non è che la traduzione delle premesse in un altro linguaggio. La vera dimostrazione è al contrario feconda perché la conclusione è in un certo senso più generale delle premesse.[12]

La verificazione permette, in modo analitico, di controllare proposizioni particolari. L'identità $2+2=4$ è verificabile, perché è possibile controllare, in un numero finito di passi, che la proposizione è vera. La verificazione di tale identità utilizza solo la definizione della somma e alcune leggi logiche. La proposizione $\forall x \forall y(x+y=y+x)$, che esprime la proprietà commutativa della somma, non è verificabile. Comunque si scelgano due numeri naturali arbitrari a e b, è possibile verificare analiticamente $a+b=b+a$. Non è tuttavia possibile esaurire l'infinità dei casi particolari della proprietà commutativa. Per dimostrare la proprietà commutativa, è necessario ricorrere al principio d'induzione.

La verificazione è una procedura analitica che consente di controllare ogni caso particolare di un teorema. La dimostrazione permette di elevarsi alla generalità del teorema, tramite il ricorso al principio d'induzione, che consente di racchiudere in una sola formula un'infinità di casi particolari. Il principio d'induzione è essenziale nella dimostrazione, mentre è superfluo nella verificazione. Il principio d'induzione è necessario per la conoscenza matematica. È quindi un giudizio sintetico a priori.

Il principio d'induzione, sostiene Poincaré, trae la propria irresistibile evidenza dall'intuizione. Il principio d'induzione non è altro che

> l'affermazione del potere della mente [*esprit*] che sa di poter concepire la ripetizione indefinita d'un medesimo atto, quando quest'atto sia una volta possibile.[13]

Il principio d'induzione è evidente perché si basa sulla possibilità di ripetere indefinitamente una medesima operazione. Questa possibilità non è logicamente dimostrabile, ma l'intuizione ne garantisce la correttezza.

4. Il paradosso di Löwenheim-Skolem

Il predicativismo sostiene che gli oggetti matematici non esistono indipendentemente dalla definizione. Le proprietà degli oggetti matematici, dunque, non possono essere assolute, ma devono dipendere dal contesto nel quale gli oggetti sono definiti. Weyl, importante esponente del predicativismo, affermava:

> Non esiste una *scala universale di numeri ordinali e cardinali infiniti* come quella di Cantor, che sia valida in uguale misura per tutti gli ambiti operativi.[14]

Il paradosso di Löwenheim-Skolem può essere usato a supporto del predicativismo. Questo paradosso sembrerebbe mostrare che le proprietà degli oggetti matematici dipendono dai mezzi usati per descriverli, proprio come sostenuto dal predicativismo. In particolare, la numerabilità di un insieme infinito sarebbe una proprietà relativa al contesto nel quale l'insieme è descritto.

---

[12] H. POINCARE, *La science et l'hypothèse*, Parigi, Flammarion, 1902, pp. 13 (tr. it. mia).
[13] Ivi, p. 24 (tr. it. mia).
[14] H. WEYL, *Das Kontinuum*, Berlino, Walter de Gruyter, 1918 (tr. it. di A. B. Veit Riccioli, *Il Continuo*, Napoli, Bibliopolis, p. 45). Herman Weyl fu un matematico e fisico tedesco, nato a Elmshorn, vicino Amburgo, nel 1885, morto a Zurigo nel 1955. Fu uno dei primi scienziati a dedicarsi alla teoria della relatività generale, ideando una teoria (errata) del campo elettromagnetico come espressione dello spazio-tempo. Lavorò sulla geometria non euclidea e la topologia. In campo filosofico è noto per i suoi studi sui fondamenti della matematica, che posero particolare enfasi sul costruttivismo.

Nel 1915 Löwenheim pubblicò la dimostrazione di un teorema concernente quel ramo della logica matematica che sarà più tardi chiamato *teoria dei modelli*.[15] Il teorema di Löwenheim asserisce: se un insieme numerabile di proposizioni ha un modello, allora ha anche un modello numerabile. La dimostrazione di Löwenheim era incompleta, anche se sostanzialmente corretta. Nel 1920 Skolem pubblicò una dimostrazione formalmente corretta, usando l'assioma della scelta.[16] Due anni dopo, nel 1922, Skolem dimostrò il teorema utilizzando il lemma di König in luogo dell'assioma della scelta.[17] Il teorema, noto come teorema di Löwenheim-Skolem, asserisce che un insieme numerabile di proposizioni non contraddittorie ha un modello numerabile. In altri termini, se un insieme numerabile *S* di proposizioni non è contraddittorio, allora esiste una struttura matematica *M* che contiene soltanto insiemi numerabili e finiti, tale che ogni proposizione di *S* è vera in *M*. L'applicazione di questo teorema alla teoria degli insiemi produce il cosiddetto paradosso di Löwenheim-Skolem. È possibile formalizzare la teoria degli insiemi mediante un insieme *S* numerabile di proposizioni. Si assuma che la teoria formale degli insiemi sia non contraddittoria; allora, in virtù del teorema di Löwenheim-Skolem, esiste un modello *M* numerabile in cui sono vere tutte le proposizioni di *S*. Sia *C* la proposizione che afferma l'esistenza di insiemi più che numerabili. La proposizione *C* è dimostrabile nella teoria degli insiemi. *M* è un modello della teoria degli insiemi; quindi, la proposizione *C* è vera in *M*, anche se *M* non contiene insiemi più che numerabili. Questo risultato è paradossale: com'è possibile che, in un modello nel quale non esistono insiemi più che numerabili, sia vera la proposizione che asserisce la loro esistenza? Skolem ha suggerito la seguente risposta. Un insieme infinito *I* è numerabile se e solo se esiste una relazione biunivoca tra gli elementi di *I* e i numeri naturali. Questa relazione è un insieme. Se un modello *M* contiene un insieme numerabile corrispondente alla relazione biunivoca tra gli elementi di *I* e i numeri naturali, allora *I* è numerabile in *M*. Se *M* non contiene alcun insieme corrispondente a tale relazione, allora *I* è più che numerabile in *M*. La numerabilità dell'insieme *I* non è una proprietà assoluta, ma dipende dalla capacità espressiva del modello *M*. La numerabilità di un insieme è una proprietà relativa, non assoluta. Qualunque insieme infinito è numerabile in un modello con sufficienti capacità espressive. Non esistono insiemi infiniti assolutamente non numerabili.

5. Matematica predicativa

Weyl ha adoperato la concezione filosofica del predicativismo per sviluppare un sistema matematico alternativo alla matematica classica.[18] Secondo Weyl, ogni disciplina matematica è costituita di un ambito operativo di base, composto di categorie di oggetti e relazioni, e di entità costruite gerarchicamente dall'ambito operativo di base. Weyl distingue due tipi di procedimenti che generano nuovi oggetti e relazioni: il *processo logico* e il *processo matematico*. Il processo logico utilizza soltanto principi logici,

---

[15] L. LÖWENHEIM, "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" in *Mathematische Annalen* vol. 76, pp. 447–470. Leopold Löwenheim fu un matematico tedesco, nato nel 1878 a Krefeld, città di origine romana nella Renania Settentrionale-Vestfalia. Studiò matematica e scienze naturali all'Università di Berlino e al Politecnico di Charlottenburg. Nel 1904 fu nominato insegnate di ginnasio a Berlino. Fu costretto a dimettersi da ogni incarico nel 1934, dopo l'ascesa al potere di Hitler, poiché giudicato non ariano (uno dei nonni era ebreo). Rimasto in Germania, fu gravemente ferito durante un bombardamento alleato su Berlino nel 1943. Dopo la guerra, riprese l'insegnamento. Morì a Berlino nel 1957. È considerato uno dei fondatori della teoria dei modelli.

[16] T. A. SKOLEM, "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Satze nebst einem Theoreme über dichte Mengen" in *Videnskapsselskapet Skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse*, vol. 6, pp. 1-36. Thoralf Albert Skolem fu un matematico norvegese, nato nel 1887 a Sandsvær e morto nel 1963 a Oslo. Studiò matematica all'Università di Oslo. Insegnò a Oslo e Bergen. Si è dedicato a diversi settori: astronomia, algebra, funzioni ricorsive e logica matematica. L'assioma della scelta asserisce che, data una collezione di insiemi non vuoti, è possibile costruire un nuovo insieme prendendo un elemento da ciascuno degli insiemi della collezione. Questo assioma è stato spesso criticato, per i risultati paradossali (ma non contraddittori) che permette di dimostrare.

[17] T. A. SKOLEM, "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" in *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Helsinki, Akademiska Bokhandeln, 1923, pp. 217-232. La dimostrazione era stata presenta in un congresso nel 1922. Il lemma di König asserisce: in un albero infinito, in cui ciascun nodo ha un numero finito di successori, esiste un cammino infinito. È un risultato fondamentale nella teoria dei grafi, usato spesso in logica matematica, ad esempio per dimostrare la completezza del calcolo dei predicati.

[18] H. WEYL, *Das Kontinuum*, cit.

come la congiunzione e la negazione, mentre il processo matematico utilizza funzioni ricorsive e principi insiemistici.

Una proposizione, nel sistema di Weyl, è una combinazione di simboli sintatticamente corretta, ossia una combinazione di simboli che soddisfa una collezione data di regole. Non tutte le proposizioni, asserisce Weyl, hanno un senso. È sensato affermare o negare una proprietà solo per gli oggetti di un'opportuna categoria. La proposizione "l'oggetto a ha la proprietà P" ha senso soltanto se a appartiene alla categoria di oggetti per i quali è sensato affermare o negare P. Ogni proprietà ha senso per una determinata categoria di oggetti. Una proposizione sensata esprime un *giudizio*. Ogni giudizio è vero o falso. Ogni proposizione sensata soddisfa dunque il principio del terzo escluso.

Ogni teoria matematica ammette la categoria dei numeri naturali e la relazione di successore. L'identità tra oggetti ha senso per ogni categoria. La teoria pura dei numeri è quella parte della matematica che ammette soltanto la categoria dei numeri naturali e le relazioni di successore e d'identità.

Il processo logico si basa sulle seguenti regole.

(9) È possibile costruire la negazione di ogni giudizio.
(10) È possibile combinare due giudizi mediante la congiunzione o la disgiunzione.
(11) È possibile sostituire una variabile con una costante, se appartengono alla medesima categoria.
(12) È possibile quantificare universalmente su ogni variabile.

Il quantificatore esistenziale, mancante nelle regole, è introdotto come abbreviazione: la proposizione $\exists x P(x)$ è l'abbreviazione della proposizione $\neg\forall x\neg P(x)$.

Il procedimento matematico si basa sui principi di comprensione, sostituzione e ricorsione.

Comprensione. Per ogni proprietà P, esiste l'insieme degli oggetti che hanno P.

Sostituzione. Siano $R(uvxyz)$ e $S(xwU)$ due relazioni. La relazione R contiene le variabili indipendenti x, y, z e le variabili dipendenti u e v. R definisce la funzione $f(x,y,z)$. Si supponga che U sia una relazione a due posti le cui variabili si riferiscono alla medesima categoria di oggetti cui appartengono i valori di $f(x,y,z)$. Si può formare la relazione $S(xwf(x,y,z))$.

Ricorsione. Sia $R(xyX)$ una relazione nella quale occorrono le variabili dipendenti x e y e la variabile indipendente X, i cui valori appartengono alla medesima categoria di x e y. La relazione R definisce la funzione $f(X)$. Si consideri la proposizione $R(xyf(X))$, nella quale X è sostituita con $f(X)$. Essa dà origine a una nuova funzione, $f(f(X))$. Ripetendo il procedimento descritto, si può generare una successione di relazioni $R_{n+1}(xyX)=R_n(xyf(X))$ e di funzioni $f_{n+1}(X)=f(f_n(X))$.

Per misurare la forza del sistema di Weyl si possono confrontare i teoremi in esso dimostrabili con gli equivalenti teoremi classici. Le seguenti proposizioni sono dimostrabili sia nell'analisi classica sia nel sistema di Weyl.

(12) Il principio di convergenza di Cauchy: una successione qualsiasi di numeri reali è convergente se e solo se i suoi elementi diventano arbitrariamente vicini, ossia più vicini di un qualsiasi numero finito dato piccolo a piacere.
(13) Ogni successione di numeri reali, limitata e crescente, è convergente.
(14) Una funzione continua in un intervallo di numeri reali è ivi uniformemente continua.
(15) Una funzione monotòna continua ha inverso.

Il sistema di Weyl non è abbastanza forte da poter dimostrare le seguenti proposizioni, che sono invece dimostrabili nell'analisi classica.

(16) Il principio delle sezioni di Dedekind: qualsiasi numero reale r è definibile come l'insieme infinito dei numeri razionali minori di r.
(17) Ogni insieme limitato di numeri reali ha un estremo superiore.
(18) Il teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni insieme infinito e limitato di numeri reali ha un punto di accumulazione.

Nel sistema di Weyl le seguenti proposizioni non sono equivalenti, mentre lo sono nell'analisi classica.

(19) Il principio delle sezioni di Dedekind.
(20) Il principio di Cauchy: due successione x_n e y_n, tali che i loro elementi diventano arbitrariamente vicini, ossia più vicini di un qualsiasi numero finito dato piccolo a piacere, rappresentano il medesimo numero reale se e solo se la successione x_n-y_n converge a zero.
(21) Ogni successione monotòna e limitata è convergente.
(22) L'assioma di Cantor: l'intersezione di una qualsiasi successione di intervalli chiusi $I_n=[a_n,b_n]$ tale che $I_n\supseteq I_{n+1}$ non è vuota.

6. Numeri ordinali

Nella seconda metà del Novecento sono stati sviluppati alcuni sistemi formali che, nelle intenzioni dei loro autori, corrispondono all'analisi predicativa. Per misurare la forza di questi sistemi si utilizzano tecniche di teoria della dimostrazione basate sul calcolo del più piccolo numero ordinale la cui esistenza non è dimostrabile nel sistema. Per comprendere questi metodi è necessario esporre, in modo informale, i numeri ordinali.

L'ordinale 0 è l'insieme vuoto. L'ordinale 1 è l'insieme che contiene l'ordinale 0. L'ordinale 2 è l'insieme che contiene gli ordinali 0 e 1 in quest'ordine. L'ordinale α è l'insieme che contiene tutti gli ordinali minori di α, in ordine crescente: $\alpha = \{0,1,2,...,\alpha\text{-}1\}$ (si è soliti indicare i numeri ordinali con le lettere greche, per distinguerli dai numeri naturali). La somma di ordinali finiti soddisfa le usuali proprietà aritmetiche: è commutativa e associativa. Il risultato della somma di due ordinali finiti è il medesimo della somma dei corrispondenti numeri naturali; ad esempio, la somma degli ordinali 5 e 7 è uguale all'ordinale 12.

L'insieme $\{0,1,2,...\}$ degli ordinali finiti corrisponde a un ordinale infinito, indicato di solito con la lettera greca ω (omega). L'ordinale ω ha alcune interessanti proprietà. In primo luogo, è il più piccolo ordinale infinito; ossia, è il più piccolo ordinale maggiore di un qualsiasi ordinale finito. In secondo luogo, è il più piccolo ordinale, diverso da 1, che non può essere espresso come somma di ordinali minori: per ogni ordinale α e β, con α e β minori di ω, risulta $\alpha+\beta < \omega$.

Gli ordinali infiniti hanno caratteristiche peculiari. Ad esempio, $1+\omega = \omega < \omega+1$. Perché la proprietà commutativa non è valida? I due insiemi $1+\omega = \{0\}+\{0,1,2,...\} = \{0,0,1,2,...\}$ e $\omega+1 = \{0,1,2,...\}+\{0\} = \{0,1,2,...,0\}$ hanno struttura diversa. L'insieme $1+\omega$ non ha un ultimo elemento, mentre l'insieme $\omega+1$ ha un ultimo elemento, l'ordinale 0, che viene dopo tutti gli ordinali finiti. L'insieme $1+\omega$ ha la medesima struttura dei numeri naturali; è perciò uguale a ω. L'insieme $\omega+1$ ha una struttura diversa da quella dei numeri naturali, poiché contiene come segmento iniziale ω. L'ordinale $\omega+1$ è quindi maggiore di ω.

Addizionando ordinali a ω, si ottengono gli ordinali $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\omega+4$,..., $\omega+\omega$,..., $\omega+\omega+\omega$,..., $\omega+\omega+\omega+\omega$,... Si può scrivere $\omega\cdot 2$ in luogo di $\omega+\omega$, $\omega\cdot 3$ in luogo di $\omega+\omega+\omega$, $\omega\cdot 4$ in luogo di $\omega+\omega+\omega+\omega$. Continuando tale serie, si giunge all'ordinale $\omega\cdot\omega$, il prodotto di ω con sé stesso. L'ordinale $\omega\cdot\omega$ è l'insieme che contiene la successione dei numeri ordinali finiti, seguita dalla successione dei numeri ordinali finiti, seguita dalla successione dei numeri ordinali finiti e così via: $\omega\cdot\omega = \{0,1,2,...,0,1,2,...,0,1,2,...,...\}$. Il lettore avrà già intuito che, oltre all'ordinale $\omega\cdot\omega$, esistono anche gli ordinali $\omega\cdot\omega\cdot\omega$, $\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$,... Tali ordinali possono essere scritti come ω^2, ω^3, ω^4,..., sino a giungere all'ordinale ω^ω, ossia ω moltiplicato con sé stesso ω volte. La successione dei numeri ordinali continua con ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$,... In questa successione, l'ordinale ω è elevato a sé stesso un numero finito di volte. Che cosa accade se si eleva ω a sé stesso per ω volte? Si ottiene l'ordinale $\left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\}\omega \text{ volte}$, indicato con il simbolo ε_0 (si legge epsilon zero). L'ordinale ε_0 ha tre importanti proprietà.

1. ε_0 è il più piccolo ordinale α che soddisfa la relazione $\omega^\alpha = \alpha$; ossia, ω elevato a ε_0 è uguale a ε_0.
2. ε_0 è il più piccolo ordinale la cui esistenza non è dimostrabile nell'aritmetica di Peano.
3. È possibile dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica di Peano mediante una forma ristretta del principio d'induzione fino a ε_0.

Per ogni sistema formale **T** esistono infiniti ordinali la cui esistenza non è dimostrabile in **T**. Si usa solitamente la notazione **| T |** per indicare il più piccolo ordinale la cui esistenza non è dimostrabile in **T**. Usando il simbolo **PA** per indicare l'aritmetica di Peano, risulta **| PA** | = ε_0.

Perché c'è uno zero nel simbolo ε_0? Perché esiste anche l'ordinale ε_1, il successivo ordinale che soddisfa la relazione $\omega^\alpha = \alpha$. Esistono anche gli ordinali ε_2, ε_3, ε_4,...? Sì. Esiste una successione infinita di ordinali ε_γ (chiamati numeri epsilon) tali che $\omega^{\varepsilon_\gamma} = \varepsilon_\gamma$. Si può definire una funzione Θ_0 (si legge teta zero) che elenca i numeri ordinali ω^α: $\Theta_0(0)=\omega^0=1$, $\Theta_0(1)=\omega^1=\omega$, $\Theta_0(2)=\omega^2$,... È possibile definire una funzione Θ_1 (si legge teta uno) che elenca i numeri epsilon: $\Theta_1(0)=\varepsilon_0$, $\Theta_1(1)=\varepsilon_1$, $\Theta_1(2)=\varepsilon_2$,...,$\Theta_1(\gamma)=\varepsilon_\gamma$. La funzione Θ_1 elenca i punti fissi della funzione Θ_0.[19] Esiste un numero ordinale α tale che $\Theta_1(\alpha)=\alpha$? Sì, esistono infiniti ordinali α tali che $\Theta_1(\alpha)=\alpha$. Tali ordinali sono i punti fissi della funzione Θ_1. È possibile definire una funzione Θ_2 che elenca i punti fissi della funzione Θ_1. La funzione Θ_2 ha anch'essa un'infinità di punti fissi. Esiste dunque una funzione Θ_3 che elenca i punti fissi della funzione Θ_2. Il procedimento può essere ripetuto, creando una successione infinita di funzioni Θ_α che elencano i punti fissi delle funzioni Θ_β con $\beta<\alpha$. Esiste un numero ordinale, chiamato Γ_0 (si legge gamma zero), che soddisfa la seguente relazione: $\Theta_{\Gamma_0}(0) = \Gamma_0$. Il numero Γ_0 è il più piccolo ordinale la cui esistenza non è dimostrabile nell'analisi ramificata **RA** che formalizza la matematica predicativa. Γ_0 è dunque l'ordinale caratteristico della matematica predicativa.[20]

7. Predicatività locale: le definizioni induttive

In matematica sono usate spesso le *definizioni induttive*. La loro natura può essere spiegata confrontando due diverse definizioni dell'insieme ℕ dei numeri naturali.

(N1) L'insieme ℕ dei numeri naturali è l'intersezione di tutti gli insiemi *I* tali che:
- (a) zero appartiene a *I* ;
- (b) il successore di un elemento di *I* appartiene a *I*.

(N2) L'insieme ℕ dei numeri naturali è il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti clausole:
- (a) zero appartiene a ℕ;
- (b) il successore di un elemento di ℕ appartiene a ℕ.

La definizione (N1) è impredicativa. Essa definisce l'insieme ℕ dei numeri naturali facendo riferimento alla totalità degli insiemi che includono lo zero e contengono il successore di ogni elemento. Questa totalità comprende anche l'insieme ℕ dei numeri naturali. (N1) definisce dunque l'insieme ℕ dei numeri naturali facendo riferimento a una totalità che già comprende ℕ. Perciò, (N1) è una definizione impredicativa. La definizione (N2) ha un aspetto diverso, che sembrerebbe renderla accettabile dal predicativismo. Per definire l'insieme ℕ dei numeri naturali, la definizione (N2) costruisce i singoli numeri naturali iniziando dallo zero. Si supponga di voler dimostrare che 3 è un numero naturale, ossia che 3 appartiene all'insieme ℕ dei numeri naturali. La clausola (a) di (N2) asserisce che zero appartiene a ℕ. Applicando una volta la clausola (b) di (N2) si deduce che 1 appartiene a ℕ. Applicando una seconda volta la clausola (b) segue che 2 appartiene a ℕ. Un'ultima applicazione della medesima clausola permette di concludere che 3 appartiene a ℕ. Ciascun passo della dimostrazione che 3 appartiene a ℕ è un passo elementare, che produce una conoscenza di complessità non superiore alla conclusione finale. Per provare che 3 appartiene a ℕ si è dimostrato che 0, 1 e 2 appartengono a ℕ: i passi intermedi, dunque, non sono più complessi della conclusione. Per provare che 3 appartiene a ℕ usando la definizione (N1), si deve dimostrare che 3 appartiene a ogni insieme che contiene lo zero e il successore di ogni elemento. Il passo intermedio è più complesso della conclusione. La definizione impredicativa (N1) produce dimostrazioni i cui passi intermedi sono più complessi della conclusione. Al contrario, la definizione (N2) produce dimostrazioni i cui passi intermedi non sono più complessi del risultato finale.

Il lettore potrebbe domandarsi perché siano preferibili dimostrazioni i cui passi intermedi sono meno complessi della conclusione. Esistono almeno due motivi per preferire queste dimostrazioni. In primo luogo, le dimostrazioni nelle quali i passi intermedi non sono più complessi della conclusione sono più sicure e facili da controllare di quelle in cui i passi intermedi sono più complessi della conclusione. In secondo luogo,

---

[19] Un punto fisso di una funzione Φ definita sugli ordinali è qualsiasi ordinale α tale che $\Phi(\alpha)=\alpha$.

[20] Γ_0 è chiamato ordinale di Feferman-Schütte, dal nome di due studiosi di logica, l'americano Solomon Feferman (nato nel 1928) e il tedesco Kurt Schütte (1909-1998). Entrambi hanno dimostrato, indipendentemente l'uno dall'altro, che Γ_0 è l'ordinale caratteristico di alcuni sistemi logici che possono essere considerati come l'espressione formale della matematica predicativa (S. FEFERMAN, "Systems of predicative analysis" in *Journal of Symbolic Logic* vol. 29, 1964, pp. 1-30; K. SCHÜTTE, "Predicative well-ordering" in M. A. E. DUMMETT, *Formal systems and recursive functions*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1965, pp. 280-303). Esiste una divergenza di opinioni sul fatto che Γ_0 sia veramente l'ordinale caratteristico della matematica predicativa. Alcuni studiosi, tra cui lo stesso Feferman, ritengono che la matematica predicativa si estenda oltre il confine segnato da Γ_0. Nel §10 espongo i motivi che mi inducono a ritenere che la matematica predicativa si estenda oltre Γ_0.

si pensi all'eventualità di trasformare una dimostrazione in un algoritmo per calcolatore. Quale sarebbe lo spreco di risorse, in termini di memoria e tempo di calcolo, se, per ottenere un certo risultato, si obbligasse il calcolatore a produrre passi intermedi più complessi?

(N2) definisce l'insieme ℕ dei numeri naturali tramite oggetti meno complessi di ℕ. Per ogni numero naturale *n*, (N2) fornisce un metodo per dimostrare, in un numero finito di passi, che *n* è effettivamente un numero naturale: basterà provare la proposizione "*n*-1 è un numero naturale". Questa proposizione è, in un senso definito, più semplice di "*n* è un numero naturale".

(N1) definisce l'insieme ℕ dei numeri naturali dall'alto, costruendo dapprima oggetti più complessi di ℕ, scendendo quindi la scala della complessità sino a raggiungere ℕ. È come se, per arrivare al terzo piano di un palazzo, si salisse dapprima sul tetto con un elicottero e quindi si scendesse con l'ascensore. La definizione (N2), invece, costruisce l'insieme ℕ dei numeri naturali dal basso, senza mai produrre qualcosa di più complesso. Corrisponde al metodo naturale per raggiungere il terzo piano: entrare dal piano terra e prendere l'ascensore.

Le definizioni induttive sono accettabili dal predicativismo? Soltanto in parte. La definizione (N2) afferma che ℕ è *il più piccolo* insieme che soddisfa certe clausole. Le tre parole in corsivo, "il più piccolo", dall'apparenza innocua (talmente innocua che, talvolta, sono omesse) rendono la definizione (N2) impredicativa. Volendo essere precisi, la definizione (N2) dovrebbe assumere questa forma:

(N3) L'insieme ℕ è l'insieme che soddisfa le seguenti clausole:
- (a) zero appartiene a ℕ;
- (b) il successore di un elemento di ℕ appartiene a ℕ;
- (c) ℕ è il piccolo insieme che soddisfa le clausole (a) e (b).

La clausola (c) di (N3) menziona la totalità degli insiemi che soddisfano le clausole (a) e (b). Questa totalità contiene l'insieme ℕ dei numeri naturali; quindi, (N3) è impredicativa. Più esattamente, le clausole (a) e (b) sono predicative, mentre la clausola (c) è impredicativa. Ogni singolo passo della costruzione dell'insieme ℕ dei numeri naturali è predicativamente accettabile, ma la costruzione complessiva di ℕ usa metodi impredicativi. Questa situazione, che caratterizza le definizioni induttive, è chiamata *predicatività locale*. Le definizioni induttive sono localmente predicative (ossia, predicative nella costruzione dei singoli elementi dell'insieme), ma sono impredicative quando si riferiscono all'insieme nella sua totalità.

8. Teorie formali per definizioni induttive

La definizione induttiva di un insieme *A* consta di tre elementi: la clausola base, la clausola induttiva e la clausola di chiusura. La clausola base definisce l'insieme $A_0 \subseteq A$ dal quale inizia la generazione degli elementi di *A*. Nella definizione (N3), la clausola base è la clausola (a), che definisce A_0 come l'insieme contenente solo il numero zero. La clausola induttiva descrive come costruire gli elementi dell'insieme *A* iniziando da A_0. Nella definizione (N3), la clausola induttiva è la clausola (b). La clausola di chiusura afferma che l'insieme *A* è il più piccolo insieme che soddisfa sia la clausola base sia quella induttiva. Nella definizione (N3), la clausola di chiusura è la clausola (c). Le clausole base e induttiva sono predicative, mentre la clausola di chiusura è impredicativa.

Per descrivere le definizioni induttive si può usare la nozione di *regola*.[21] Una regola è una coppia ordinata (A,a) ove *A* è un insieme, chiamato premessa della regola, e *a* è un oggetto qualsiasi, chiamato conclusione della regola. Sia *R* una collezione di regole. Un insieme *B* si dice chiuso rispetto a *R* se e solo soddisfa la seguente condizione: per ogni regola (A,a) di *R*, se $A \subseteq B$ allora $a \in B$. In altri termini, un insieme si dice chiuso rispetto a una collezione di regole se contiene le conclusioni di tutte le regole applicabili. La collezione *R* di regole definisce l'insieme ottenuto dall'intersezione di tutti gli insiemi chiusi rispetto a *R* (si osservi che questa definizione è impredicativa). Designerò questo insieme con il simbolo $CL(R)$ (*CL* sta per *closure*, chiusura, poiché $CL(R)$ è il più piccolo insieme chiuso rispetto a *R*).

Le classi di regole corrispondono alle definizioni induttive. Le regole $(\varnothing,a)$, ove $\varnothing$ è l'insieme vuoto, corrispondono alla clausola base. Le regole (A,a), ove *A* è un insieme non vuoto, corrispondono alla clausola

[21] Cfr. P. ACZEL, "An introduction to inductive definitions" in J. BARWISE, *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1977, pp. 739-782.

induttiva. L'affermazione che $CL(R)$ è il più piccolo insieme chiuso rispetto a R corrisponde alla clausola di chiusura. Le definizioni induttive e le classi di regole, dunque, coincidono.

Un altro modo per descrivere le definizioni induttive utilizza la nozione di *operatore monotòno*.[22] Sia A un insieme e $\boldsymbol{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. Una funzione Ψ, definita sugli insiemi di $\boldsymbol{P}(A)$, tale che $\Psi(K)\in\boldsymbol{P}(A)$ quando $K\subseteq\boldsymbol{P}(A)$, è detta operatore monotòno se e solo se soddisfa la seguente condizione: se $X\subseteq Y\subseteq A$ allora $\Psi(X)\subseteq\Psi(Y)\subseteq\boldsymbol{P}(A)$. Si considerino un insieme A e un operatore monotòno Ψ definito su $\boldsymbol{P}(A)$. Si definisce una successione di insiemi Ψ_α, ove α varia sugli ordinali, nel modo seguente:

(23) $\Psi_0=\Psi(A)$

(24) $\Psi_\alpha=\Psi(\bigcup_{\beta<\alpha}\Psi_\beta)$ ove $\bigcup_{\beta<\alpha}\Psi_\beta$ è l'unione degli insiemi costruiti nei passi precedenti.

Per ogni operatore monotòno Ψ esiste un numero ordinale α tale che $\Psi_{\alpha+1}=\Psi_\alpha$. Questo numero ordinale è chiamato *ordinale chiusura* di Ψ ed è indicato solitamente con il simbolo $\|\Psi\|$. La proprietà fondamentale dell'ordinale chiusura è la seguente: se $\alpha>\|\Psi\|$ allora $\Psi_\alpha=\Psi_{\|\Psi\|}$. Ciò significa che, una volta generato l'insieme $\Psi_{\|\Psi\|}$ (ossia, il primo insieme Ψ_α tale che $\Psi_{\alpha+1}=\Psi_\alpha$), i successivi insiemi generati non avranno alcun nuovo elemento. La produzione degli insiemi può quindi terminare con l'insieme $\Psi_{\|\Psi\|}$. Questo insieme è chiamato *insieme chiusura* dell'operatore Ψ.

Il collegamento tra regole e operatori monotòni è espresso dalle due proposizioni seguenti.

(25) Per ogni collezione R di regole che definisce un insieme $CL(R)$ esiste un operatore monotòno Ψ tale che $\Psi_{\|\Psi\|} = CL(R)$ (ossia, ogni insieme definibile tramite una collezione di regole è definibile anche tramite un operatore monotòno).

(26) Per ogni operatore monotòno Ψ con insieme chiusura $\Psi_{\|\Psi\|}$ esiste una collezione R di regole che definisce un insieme $CL(R)$ tale che $CL(R) = \Psi_{\|\Psi\|}$ (ossia, ogni insieme definibile tramite un operatore monotòno è definibile anche tramite una collezione di regole).

Le collezioni di regole, come già visto, corrispondono alle definizioni induttive. Le proposizioni (25) e (26) assicurano che gli operatori monotòni e le collezioni di regole definiscono i medesimi insiemi. Quindi, le definizioni induttive corrispondono agli operatori monotòni. Ciò consente la seguente caratterizzazione delle definizioni induttive.

(27) Una definizione induttiva di un insieme A, da un insieme iniziale $A_0\subseteq\boldsymbol{P}(A)$, è un operatore monotòno Ψ definito su $\boldsymbol{P}(A)$ tale che $A = \Psi_{\|\Psi\|}$.

È possibile formalizzare la nozione di operatore monotòno estendendo l'aritmetica di Peano con gli assiomi che esprimono le proprietà degli insiemi definiti induttivamente. Posso esporre un semplice esempio, per dare un'idea del procedimento. Si consideri una formula F dell'aritmetica che definisce un operatore monotòno Ψ_F. Sia $CL(\Psi_F)$ l'insieme chiusura di Ψ_F. Per esprimere che la formula F definisce induttivamente l'insieme $CL(\Psi_F)$, si devono aggiungere all'aritmetica di Peano gli assiomi seguenti.

(28) $\forall x\ [\ F(CL(\Psi_F),x)\rightarrow x\in CL(\Psi_F)\ ]$

(29) $\forall x\ [\ F(G,x)\rightarrow G(x)]\rightarrow\forall x\ [\ x\in CL(\Psi_F)\rightarrow G(x)\ ]$ per ogni formula G.

L'assioma (28) asserisce che ogni oggetto x che soddisfa la formula F appartiene all'insieme $CL(\Psi_F)$; equivale alle clausole base e induttiva. L'assioma (29) afferma che l'insieme $CL(\Psi_F)$ è il più piccolo insieme definito dalla formula F; corrisponde alla clausola di chiusura. La teoria formale ottenuta estendendo in tal modo l'aritmetica di Peano è solitamente indicata con il simbolo $\mathbf{ID_1}$, acronimo di *Inductive Definition*. Il numero 1 indica che $\mathbf{ID_1}$ è la prima di una serie infinita di teorie, sempre più potenti, generate estendendo il linguaggio e gli assiomi delle teorie precedenti. Non ci occuperemo di questa successione di teorie. La nostra attenzione è confinata alla teoria $\mathbf{ID_1}$, che formalizza le definizioni induttive sui numeri naturali. Per comprendere quanto sia forte la teoria $\mathbf{ID_1}$ si può determinare il suo ordinale caratteristico $|\ \mathbf{ID_1}\ |$. Si è visto che la forza dimostrativa dell'aritmetica di Peano è espressa da ε_0, il più piccolo ordinale che soddisfa la relazione $\omega^\alpha = \alpha$. La forza dimostrativa dell'analisi predicativa è rappresentata Γ_0, il più piccolo ordinale che soddisfa la relazione $\Theta_\alpha(0) = \alpha$, ove la funzione Θ elenca i numeri epsilon. Esistono infiniti numeri $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2,\ldots$ che soddisfano $\Theta_\alpha(0) = \alpha$. Per esprimere tali numeri, e più in genere per esprimere i numeri ordinali maggiori di Γ_0, si usa un metodo diverso da quello illustrato per i numeri ordinali minori di Γ_0. La

[22] Cfr. P. ACZEL, "An introduction to inductive definitions", cit.

caratteristica di tale metodo consiste nell'esprimere numeri ordinali tramite ordinali più grandi. È come se, per esprimere il numero 7, si dicesse che 7 è il numero che precede immediatamente 8, invece di dire che 7 è il successore di 6.

Come si esprimono i numeri più grandi di Γ_0? Si usa un ordinale particolare, il numero ω_1^{CK} (si legge omega uno ci kappa, oppure omega uno Church Kleene, in onore di due celebri studiosi di logica). ω_1^{CK} è il primo numero ordinale che non è generabile usando funzioni ricorsive. Introduco il simbolo Ω (la lettera omega maiuscola) per indicare ω_1^{CK}. Si consideri un numero ordinale α qualsiasi minore di Ω. Si definisce una funzione Φ in questo modo: $\Phi(\alpha)$ è il più piccolo numero ordinale che non può essere generato usando soltanto le funzioni di addizione, moltiplicazione, elevamento a potenza e la funzione Φ applicate agli ordinali già definiti. Per generare ordinali maggiori di α, è possibile applicare le funzioni citate ai numeri precedentemente definiti e a Ω (che è maggiore di α). Usando un numero più grande di quello che si desidera produrre, è possibile superare i punti fissi della funzione Φ. La forza della teoria $\mathbf{ID_1}$ per le definizioni induttive sui numeri naturali è espressa da un particolare ordinale generato dalla funzione Φ, chiamato ordinale di Bachmann-Howard, in onore di due logici. È uguale a $\Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$. È il valore che la funzione Φ assume in corrispondenza del numero ordinale epsilon il cui indice è l'ordinale che segue il primo ordinale non ricorsivo. L'ordinale di Bachmann-Howard misura la forza delle definizioni induttive sui numeri naturali.[23]

9. Matematica costruttiva

Il predicativismo appartiene all'indirizzo del *costruttivismo*. Il costruttivismo è una concezione filosofica della matematica. Per il costruttivismo, l'esistenza di un oggetto matematico deve essere provata tramite la sua costruzione. È abbastanza facile, tramite un esempio, spiegare l'ideale del costruttivismo. Si consideri una funzione f continua nell'intervallo $[a,b]$ ove a e b sono due numeri reali, con $a < b$. Si supponga $f(a) < 0 < f(b)$. Un teorema dell'analisi classica, noto come teorema degli zeri delle funzioni continue, asserisce che esiste un punto x, compreso tra a e b, tale che $f(x) = 0$. La dimostrazione è per dicotomia. Si considera il punto centrale c dell'intervallo $[a,b]$. Se in c la funzione f è uguale a zero, il teorema è dimostrato. Altrimenti, se la funzione è positiva in c, si considera il punto centrale dell'intervallo di sinistra; se è negativa in c, si considera il punto centrale dell'intervallo di destra. Si continua ripetutamente, generando intervalli sempre più piccoli $[a_n,b_n]$ tali che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, con $c_n = (a_n+b_n)/2$. Per n tendente a infinito, i limiti delle tre successioni a_n, b_n e c_n convergono al medesimo valore reale x tale che $f(x)=0$. Il costruttivismo obietta che questa dimostrazione non fornisce un metodo per trovare il numero reale nel quale la funzione si annulla. La dimostrazione classica asserisce l'esistenza di un numero reale che ha una certa proprietà, ma non costruisce tale numero. Una dimostrazione dell'esistenza di un oggetto dovrebbe, secondo il costruttivismo, costruire l'oggetto. Il teorema degli zeri delle funzioni continue, dunque, non è costruttivamente valido. Il costruttivismo lo sostituisce con il seguente teorema: se f è continua su $[a,b]$, con $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, allora, per ogni numero reale δ positivo piccolo a piacere, esiste un numero reale x, compreso tra a e b, tale che $|f(x)| < \delta$. La versione costruttiva del teorema degli zeri delle funzioni continue asserisce che è possibile individuare, in un numero finito di passi, un punto interno all'intervallo, nel quale la funzione si discosta da zero meno di un valore prefissato qualsiasi. Si può individuare, in un numero finito di passo, un punto nel quale la funzione è prossima allo zero, entro un margine di approssimazione qualsiasi. Non si può, in un numero finito di passi, individuare il punto in cui la funzione si annulla.

Il matematico americano Errett Bishop ha fornito una precisa formulazione della matematica costruttiva.[24] Si può determinare la forza della matematica costruttiva calcolando l'ordinale caratteristico della corrispondente teoria formale. Un sistema che formalizza la matematica costruttiva è la *matematica esplicita*,

---

[23] La dimostrazione che $|\mathbf{ID_1}| = \Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$ è di W. A. Howard. Risalente al 1965 circa, fu pubblicata nel 1972 (W. A. HOWARD, "A system of abstract constructive ordinals" in *Journal of Symbolic Logic* vol. 37, pp. 355-374). I sistemi formali per le definizioni induttive sono stati ampiamente studiati dai due logici tedeschi Wolfram Pohlers e Wilfried Buchholz. Un testo ormai classico è BUCHHOLZ, FEFERMAN, POHLERS, SIEG, *Iterated inductive definition and subsystem of analysis: recent proof-theoretical studies*, Heidelberg, Springer-Verlag, 1981. Più recente è W. POHLERS, *Proof theory: the first step into impredicavity*, Berlino, Springer-Verlag, 2009.

[24] E. BISHOP, *Foundations of constructive analysis*, New York, Mc Graw-Hill, 1967.

di solito indicata con il simbolo $\mathbf{T_0}$, sviluppata da Feferman.[25] L'ordinale caratteristico di $\mathbf{T_0}$ è maggiore dell'ordinale di Bachmann-Howard.

10.La matematica predicativa secondo Poincaré

Il predicativismo, come già detto, è la concezione filosofica della matematica che ammette soltanto le definizioni predicative e rifiuta le definizioni impredicative. Secondo Russell, sono impredicative le definizioni che menzionano una totalità cui appartiene l'oggetto da definire. Esiste un'altra interpretazione della nozione di definizione impredicativa, esposta da Poincaré in uno scritto postumo. Un insieme infinito è accettabile se e solo se i suoi elementi sono generati tramite una regola che si ripete indefinitamente. Potrebbe accadere che la generazione dei nuovi elementi alteri le proprietà degli elementi già generati. Possono dunque esistere due diversi tipi di regole:

> le regole [*classifications*] *predicative*, che non possono essere sconvolte dall'introduzione di nuovi elementi; le regole *non predicative* che l'introduzione di nuovi elementi obbliga a rimaneggiare senza sosta.[26]

La regola che definisce gli elementi di un insieme infinito genera continuamente nuovi elementi. La regola è detta *predicativa* quando la generazione dei nuovi elementi non modifica le proprietà degli elementi già generati; è detta *impredicativa* quando la generazione dei nuovi elementi modifica le proprietà degli elementi già generati. Poincaré espone il seguente esempio di definizione impredicativa.[27] L'obiettivo è definire una corrispondenza tra punti dello spazio geometrico e frasi scritte in francese. Si considerino le frasi composte di un numero di vocaboli non superiore a n. Il vocabolario francese è finito; esiste quindi un numero finito di frasi con al più n vocaboli. Si scartano le frasi che non definiscono alcun punto dello spazio. Si ordinano alfabeticamente le restanti, che definiscono punti dello spazio. Se il medesimo punto è definito da più frasi, si eliminano le frasi che seguono la prima in ordine alfabetico. Si associa ciascuna frase con il numero naturale che ne identifica la posizione nell'ordine alfabetico. La prima frase è associata al numero 1, la seconda al numero 2 e così via. Si associa il punto definito dalla k-esima frase con il numero naturale k. Che cosa accade quando si generano nuovi punti? Come si determina il numero naturale associato a un nuovo punto P? Si costruisce una frase F che definisce il punto P. S'inserisce F nell'ordinamento alfabetico delle frasi. Il posto occupato da F identifica il numero naturale associato a P. L'inserimento di F altera la posizione occupata dalle frasi che vengono dopo F in ordine alfabetico. Cambia dunque la corrispondenza tra i punti dello spazio definiti dalle frasi che seguono F in ordine alfabetico e i numeri naturali. La legge di corrispondenza è impredicativa, poiché l'associazione tra punti dello spazio e numeri naturali cambia quando si genera un nuovo punto.

Poincaré propone una nozione di definizione impredicativa diversa da quella di Russell. Secondo Poincaré, è impredicativa la definizione di un insieme infinito, i cui elementi sono generati da una regola, quando le proprietà degli elementi già generati possono essere alterate dalla produzione di nuovi elementi. Esistono dunque due diverse nozioni di definizione impredicativa.

a) È impredicativa la definizione che menziona una totalità cui appartiene l'oggetto definito.
b) È impredicativa la definizione di un insieme infinito se le proprietà degli elementi già generati possono essere alterate dalla produzione di nuovi elementi.

La nozione a) corrisponde a quella formalizzata nella matematica predicativa tradizionale; l'ordinale caratteristico della matematica predicativa, come si è visto, è Γ_0. È possibile formalizzare la nozione b)? Se sì, è possibile determinare il suo ordinale caratteristico?

La risposta a entrambe le domande è affermativa. Sarebbe troppo complesso spiegare, anche in modo elementare, come si possa formalizzare la nozione b). Il sistema formale corrispondente, indicato solitamente con il simbolo $\mathbf{KP\omega}$, è la teoria degli insiemi di Kripke e Platek con assioma dell'infinito. Il suo ordinale caratteristico è uguale a quello della teoria delle definizioni induttive sui numeri naturali. Il fatto che $|\,\mathbf{KP\omega}\,| = \Phi(\varepsilon_{\Omega+1}) = |\,\mathbf{ID_1}\,|$, unito al carattere localmente predicativo di $\mathbf{ID_1}$, suggerisce che la teoria $\mathbf{ID_1}$ possa essere predicativamente accettabile nel senso di Poincaré. Ritengo che la matematica predicativamente accettabile si estenda oltre il sistema della matematica predicativa tradizionale, il cui ordinale caratteristico è

[25] S. FEFERMAN, "A language and axioms for explicit mathematics" in *Lecture Notes in Mathematics* vol. 450, 1975, pp. 87-139.
[26] H. POINCARE, "La logique de l'infini" in *Dernières pensée*, cit., p. 105 (tr. it. mia).
[27] Ivi, pp. 110-111.

Γ_0. Penso che la matematica predicativa, nel senso di Poincaré, si estenda sino alla teoria delle definizioni induttive sui numeri naturali e alla teoria degli insiemi di Kripke e Platek con assioma dell'infinito. L'ordinale $\Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$ sarebbe dunque l'ordinale caratteristico delle teorie predicative, in luogo di Γ_0.

11. Conclusione

È interessante osservare come un'idea prevalentemente filosofica, concernente la realtà degli insiemi infiniti, abbia dato origine a una messe di studi logici e matematici, favorendo un'approfondita conoscenza delle relazioni che sussistono tra i sottosistemi dell'analisi, i numeri ordinali infiniti e i fondamenti della matematica.

Ordinale caratteristico di alcune teorie formali

teoria formale	**simbolo**	**ordinale**	**commento**
aritmetica di Peano	**PA**	ε_0	aritmetica
analisi ramificata	$\mathbf{RA}_{<\Gamma_0}$	Γ_0	matematica predicativa nel senso di Russell
teoria delle definizioni induttive sui numeri naturali	$\mathbf{ID}_1$	$\Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$	definizioni induttive sui numeri naturali, localmente predicative
teoria degli insiemi di Kripke e Platek con assioma dell'infinito	**KPω**	$\Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$	matematica predicativa nel senso di Poincaré
matematica esplicita	$\mathbf{T}_0$	$> \Phi(\varepsilon_{\Omega+1})$	matematica costruttiva